Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 04, No. 3(2015), hal 353-362.

PENYELESAIAN PERSAMAAN NONLINEAR BERDERAJAT DUA MENGGUNAKAN METODE HOPFIELD MODIFIKASI

Ikon Pratikno, Nilamsari Kusumastuti, Bayu Prihandono

INTISARI

Persamaan nonlinear adalah suatu persamaan yang pangkat variabelnya lebih dari satu atau terdapat suku dari persamaan yang merupakan hasilkali dari dua atau lebih variabel-variabelnya. Sedangkan sistem persamaan nonlinear adalah kumpulan dari persamaan nonlinear. Penelitian ini bertujuan mencari solusi dari persamaan dan sistem persamaan nonlinear dengan menggunakan metode Hopfield modifikasi. Metode Hopfield adalah metode pengembangan jaringan saraf tiruan yang diterapkan ke dalam jaringan listrik R-C. Metode Hopfield bertujuan mengetahui proses arus yang mengalir pada jaringan listrik. Metode Hopfield dapat digunakan untuk mencari solusi dari persamaan maupun sistem persamaan dengan memodifikasi Metode Hopfield. Metode Hopfield modifikasi merupakan pengembangan metode Hopfield dengan menambahkan integrator metode Euler dan fungsi sigmoid unilopar serta mengasumsikan bahwa arus yang mengalir pada jaringan dengan penyebaran variabel. Metode Hopfield modifikasi termasuk salah satu metode numerik dimana solusi yang didapatkan merupakan solusi hampiran. Langkah-langkah metode Hopfield modifikasi dimulai dari menyelidiki apakah nilai $f(1,1,\ldots,1)\geq P_i$. Setelah itu dilanjutkan mengubah bentuk persamaan ke dalam fungsi energi persamaan, kemudian fungsi tersebut diturunkan terhadap variabel-variabel dalam persamaan. Hasil-hasil dari derivatif digunakan untuk mendapatkan fungsi energi jaringan metode Hopfield modifikasi dan langkah untuk proses pembaharuan nilai inputan (u_i) dan variable (x_j) (Iterasi pada metode Hopfield modifikasi akan berhenti apabila nilai absolut fungsi variabel dijumlahkan dengan negatif nilai persamaan $\left(g_i(.)\right)$ kurang dari kriteria pemberhentian atau maksimum iterasi yang sudah ditentukan. Nilai variabel yang didapatkan merupakan solusi dari masalah persamaan dan sistem persamaan nonlinear tersebut.

Kata Kunci: *metode Euler,fungsi sigmoid, jaringan saraf tiruan, jaringan Hopfield*

PENDAHULUAN

Peningkatan ilmu pengetahuan mengakibatkan manusia harus mengambil sebuah keputusan yang memiliki tingkat kesalahan sangat kecil. Hal ini diakibatkan semakin modernnya teknologi alat-alat pendukung manusia. Oleh karena itu manusia harus memiliki perencanaan secara terstruktur dalam menemukan penyelesaian suatu permasalahan. Ilmu matematika mempunyai peranan untuk merekomendasikan cara menyelesaikan permasalahan yang ada di dunia nyata. Permasalahan yang terjadi pada dunia nyata dapat di bentuk dalam model matematika. Model matematika yang terbentuk dapat berupa persamaan, sistem persamaan atau berupa fungsi linear ataupun nonlinear.

Model matematika yang bersifat linear ataupun nonlinear dapat diselesaikan secara analitik ataupun numerik. Pada umumnya model matematika akan diselesaikan secara analitik yang memiliki solusi eksak. Ada beberapa model tidak dapat diselesaikan secara analitik tetapi akan diselesaikan secara numerik. Pada penelitian ini persamaan atau sistem persamaan nonlinear akan diselesaikan secara numerik. Metode numerik yang digunakan untuk mencari penyelesaian dalam persamaan atau sistem persamaan nonlinear adalah metode Hopfield Modifikasi. Metode Hopfield Modifikasi adalah metode pengembangan jaringan saraf tiruan Hopfield menggunakan fungsi aktifasi *unipolar* dan integrator metode *Euler* [1].

Penelitian ini bertujuan untuk menyelesaikan persamaaan dan sistem persamaan nonlinear berderajat dua menggunakan metode Hopfield Modifikasi. Masalah yang dibahas pada penelitian ini dibatasi pada penyelesaian persamaan nonlinear berderajat dua yang mempunyai dua variabel, persamaan yang diselesaikan bukan persamaan transenden , batasan error 10^{-6} dan maksimum proses iterasi 500.

Metodologi pada penelitian ini diawali dengan diberikan persamaan dan sistem persamaan nonlinear berderajat dua. Persamaan atau sistem persamaan tersebut diubah kebentuk fungsi energi persamaan. Hasil dari pembentukan akan diturunkan terhadap masing-masing variabel yang ada dalam persamaan. Kemudian dibentuk fungsi energi jaringan Hopfield Modifikasi yang digunakan untuk mengetahui energi pada jaringan Hopfield dan digambar arsitektur jaringan. Kemudian melakukan proses iterasi menggunakan integrator metode *Euler* dan fungsi aktivasi sigmoid unipolar. Proses ini dilakukan secara berulang hingga syarat $|g_i(.)| < \varepsilon$ terpenuhi atau maksimum iterasi terpenuhi dengan nilai $|g_i(.)| < 0{,}5$ sehingga akan didapatkan solusi penyelesaian dari persamaan atau sistem persamaan permasalahan.

Suatu persamaan dalam matematika merupakan sebuah kesamaan yang memuat tanda sama dengan dan melibatkan konstanta, variabel, serta operasi-operasi matematika. Persamaan Nonlinear adalah suatu persamaan yang pangkat variabelnya lebih dari satu atau terdapat suku dari persamaan yang merupakan hasilkali dari variabel-variabelnya misalnya persamaan lingkaran, persamaan kuadaratik, dan sebagainya [2].

Metode numerik merupakan teknik dimana masalah matematika yang dimodelkan sehingga dapat diselesaikan oleh pengoperasian aritmatika. Solusi yang didapatkan secara numerik adalah solusi hampiran atau bukan solusi yang absolut. Metode-metode numerik yang dapat digunakan dalam menyelesaikan persoalan antara lain metode bagi dua (*Bisection Method*), metode *Newton Rhapson*, metode *secant*, dan metode *Euler* [3]. Metode *Euler* merupakan metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal hanya melalui nilai-nilai fungsi yang diketahui sebelumnya [4]. Metode *Euler* menghampiri turunan pertama di $x = x_r$ dalam persamaan

$$\frac{dy(x)}{dx} = f\big(x, y(x)\big)$$

dimana $x_r = x_0 + rh$.

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \tag{1}$$

dengan $x_n - x_{n-1} = h$ dan $n = 0,1,2, \dots, N$. Persamaan (1) persamaan sebuah cara pembaharuan nilai yang dikenal dengan integrator metode *Euler*. Integrator *Euler* merupakan pembaharuan nilai yang paling sederhana untuk menyelesaikan masalah nilai awal. Integrator ini juga sebagai awal dari metode-metode implisit untuk proses penyelesaian masalah nilai awal [5].

Jaringan Saraf Tiruan

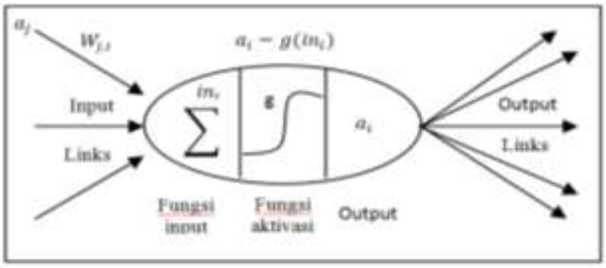
Jaringan saraf tiruan merupakan salah satu contoh keadaan buatan dari otak manusia yang selalu mencoba untuk melihatkan proses pembelajaran pada otak manusia tersebut. Konsep dasar pemodelan jaringan saraf tiruan adalah neuron dapat memproses setiap elemen. Sejumlah sinyal masukan (*a)* dikalikan dengan masing-masing unit pengolah yang bersesuaian (*W)*. Kemudian dilakukan penjumlahan dari seluruh hasil perkalian tersebut dan keluaran diteruskan ke dalam fungsi aktivasi untuk mendapatkan tingkat informasi sinyal keluaran *F(a,w)*. Proses kerja dari tiruan neuron ini dapat dilihat pada Gambar 2. Misalkan ada *n* buah sinyal masukan dan *n* buah unit pengolah, fungsi keluaran dari neuron adalah

$$in_i = \textstyle\sum_j W_{ji} \,.\, a_j$$

Arsitektur jaringan yang sering dipakai dalam jaringan saraf tiruan terdiri dari 3 macam yaitu Jaringan Lapisan Tunggal (*Single Layer Network*), Jaringan Lapisan Jamak (*Multi Layer Network*), dan Jaringan *Recurrent* [4].

Pada Jaringan lapisan tunggal beberapa input neuron dihubungkan secara langsung dengan beberapa outputnya. Jaringan dengan lapisan tunggal hanya memiliki satu lapisan dengan bobot-bobot terhubung. Jaringan ini hanya menerima input kemudian secara langsung akan mengolahnya menjadi output . Gambar 2a menunjukan arsitektur jaringan dengan *n* neuron input $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$, *m* buah neuron output $(y_1, y_2, \dots, y_j, \dots, y_m)$ dan w_{ji} menyatakan bobot hubungan antara neuron input ke-

i dengan neuron output ke-*j*. Pada jaringan lapisan jamak selain neuron input dan output, ada neuron lain yang disebut lapisan tersembunyi (*hidden layer*). Jaringan dengan banyak lapisan memiliki satu atau lebih lapisan yang terletak diantara lapisan input dan lapisan output. Gambar 2b menunjukkan jaringan dengan *n* buah neuron input $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, *p* buah neuron tersembunyi $(z_1, z_2, \dots, z_p)$ dan *m* buah neuron output $(y_1, y_2, \dots, y_m)$. Jaringan *recurrent* merupakan jaringan yang mengakomodasi output jaringan untuk menjadi input pada jaringan yang sama dalam rangka menghasilkan output jaringan berikunya, sehingga akan menjadikan jaringan dalam keadaan stabil karena tidak adanya masukan dari luar. Jaringan *recurrent* mempunyai *n* buah neuron input, *p* buah neuron tersembunyi dan *m* buah neuron output. Pada jaringan *recurrent* setidaknya memiliki satu loop umpan balik. Loop umpan balik yaitu ketika output neuron kembali ke jaringan sebagai input. Pada Gambar 2c terlihat adanya lapisan konteks (*context layer*), yang terdiri dari beberapa simpul. Lapisan inilah yang menerima output dari lapisan tersembunyi dan mengembalikannya kembali ke lapisan tersebut sebagai input. [4]



Gambar 1 Model Tiruan Sebuah Neuron

a_j = nilai aktivasi dari unit j
$W_{j,i}$ = bobot dari unit j ke unit i
in_i = penjumlahan bobot dan masukan ke unit i
g = fungsi aktivasi
a_i = nilai aktivasi dari unit i

Pada jaringan saraf tiruan terdapat suatu fungsi aktivasi yang bekerja di dalam neuron. Fungsi aktivasi adalah fungsi yang mentranformasikan suatu inputan menjadi outputan tertentu. Fungsi Sigmoid adalah salah satu fungsi aktivasi yang digunakan untuk mengaktifkan jaringan saraf tiruan. Jaringan saraf di aktifkan berarti juga mengaktifkan setiap neuron. Fungsi sigmoid terdiri dari dua jenis yaitu biner (*unipolar*) dan *bipolar*. Fungsi sigmoid biner (*Unipolar*) merupakan fungsi aktivasi yang menggunakan konsep nilai hampiran dengan kesalahan kecil. Fungsi ini memiliki interval output 0 sampai 1. Persamaan fungsi sigmoid biner (*unipolar*) dinyatakan sebagai [6]:

$$f(x) = \left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)$$

Kurva fungsi sigmoid biner (*unipolar*) dapat dilihat pada Gambar 3a. Fungsi sigmoid *bipolar* merupakan fungsi yang sama dengan fungsi sigmoid biner akan tetapi memiliki interval yang berbeda. Fungsi ini memiliki interval output dari -1 sampai 1. Kurva persamaan *bipolar* dapat dilihat pada gambar 3b. Persamaan fungsi sigmoid *bipolar* dinyatakan sebagai :

$$f(x) = \left(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)$$

Metode Hopfield Modifikasi

Pada 1982 John Hopfield mengenalkan jaringan saraf tiruan baru dengan menggunakan prinsip jaringan listrik. Pada saraf terdapat neuron, neuron memiliki tujuan dapat digambarkan oleh perubahan nilai informasi terhadap waktu di dalam sistem[3]. Setiap neuron mempunyai sebuah nilai aktifitas (V_j) yang bersifat biner, yaitu $V_j = 0$ dan $V_j = 1$. Ketika neuron *i* mempunyai hubungan ke neuron *j*, maka akan terdapat bobot hubungan (W_{ji}). Jika neuron tidak memiliki hubungan, $W_{ji} = 0$ [4]. Input pada setiap neuron berasal dari arus yang keluar dari unit pemroses ke neuron, yang mempengaruhi suatu jaringan dinamakan unit pusat (u_j). Unit pemroses diaktifkan oleh tegangan yang masuk. Input arus yang masuk jaringan ke-*i* didefinisikan

$$u_j = \sum_i W_{ji} V_i \qquad i,j = 1,2,\dots,n$$

dengan W_{ji} bobot kekuatan hubungan unit pemroses dari neuron *i* ke neuron *j*. Input setiap neuron ke-*i*, berasal dari dua sumber yaitu arus dari luar (I_j) dan input dari neuron lain yang didefinisikan

$$u_j = \sum_i W_{ji} V_i + I_j.$$

Metode Hopfield modifikasi adalah Metode Hopfield modifikasi adalah metode numerik yang berdasarkan prinsip kerja jaringan saraf Hopfield menggunakan fungsi aktivasi *unipolar*. Solusi persamaan atau sistem persamaan yang didapatkan antara 0 dan 1. Metode Hopfield modifikasi berfungsi untuk menemukan solusi dari persamaan linear dan nonlinear secara numerik. Metode Hopfield Modifikasi menggunakan prinsip jaringan saraf tiruan yang selalu terhubung secara terus menerus. Nilai baru setiap simpul hanya bergantung pada nilai perkiraan awal dengan memasukkan nilai pada waktu tertentu [6]. Pada Hopfield Modifikasi persamaan atau sistem persamaan merupakan input tegangan dalam jaringan. Jadi untuk input arus masuk pada jaringan ke-*i* dapat dirumuskan

$$u_j = \sum_i W_{ji} f_{ji}(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad i,j = 1,2,\dots,n$$

Input setiap neuron ke-*i* dapat dirumuskan

$$u_j = \sum_i W_{ji} f_{ji}(x_1, x_2, \dots, x_n) + I_j \tag{2}$$

Sebuah sistem sebanyak n neuron yang saling berhubungan nonlinear . Unit pengolah atau neuron dalam fungsi nonlinear yang ditunjukkan pada Gambar 5 memiliki input dan output karakteristik yang dijelaskan oleh fungsi aktivasi $\varphi(.): \Re \rightarrow (0,1)$. Fungsi ini diasumsikan terus terdiferensialkan dan monoton meningkat. Fungsi aktivasi yang digunakan adalah fungsi sigmoid unipolar dirumuskan [7]:

$$x = \varphi(u) = \frac{1}{1+e^{-u}} \tag{3}$$

Jaringan neuron *n* ditunjukkan pada Gambar 4. jaringan tersebut adalah penggabungan dari fungsi nonlinear di unit neuron , penggabungan nonlinear menggabungkan kedua perkalian dan penjumlahan linear. Hal ini dapat dilihat pada gambar, proses perkalian menghasilkan fungsi f_{ji} *(.)*, di mana $(i,j) \in \{1,\dots,n\}$. Fungsi $f_{ji}(.)$ adalah fungsi dari variabel $x_1, x_2, \dots, x_n, i \in n$. Output yang diperoleh dari proses perkalian dengan bobot $W_{ji}, (i,j) \in n$ [7].

Fungsi Energi jaringan Hopfield modifikasi pada masalah ini didefinisikan [1]:

$$E_H = \sum_j x_j \left(\frac{\partial E_p}{\partial x_j}\right), j \in n \tag{4}$$

Fungsi Energi Persamaan dapat ditulis

$$E_p = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\big(g_i(.)\big)^2 \tag{5}$$

dengan $g_i(.)$ adalah fungsi dalam varibel $x_1, x_2, .., x_n$ $(f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dijumlahkan dengan negatif nilai persamaan (P_i) . $g_i(.)$ dapat dirumuskan

$$g_i(.) = \big(f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + (-P_i)\big). \tag{6}$$

Perubahan kondisi jaringan dalam mencari solusi, sesuai perubahan kondisi input ke neuron-*j* terhadap waktu, yang dapat dilihat oleh persamaan diferensial:

$$\frac{du_j}{dt} = \frac{\partial E_p}{\partial x_j}.$$

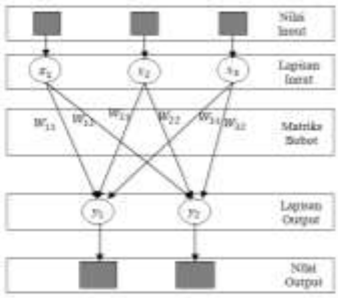
Proses secara numerik akan digunakan dalam jaringan dengan bobot dan bias yang telah didapatkan. Proses ini akan menghasilkan solusi yang diinginkan hingga syarat terpenuhi. Hal ini dilakukan menggunakan integrator metode *Euler*. Integrator metode *Euler* untuk pembaharuan nilai *u* pada metode Hopfield modifikasi dapat dirumuskan

$$u_j(t+1) = u_j(t) + \Delta t \left(\frac{\partial E_p}{\partial x_j}\right). \tag{7}$$

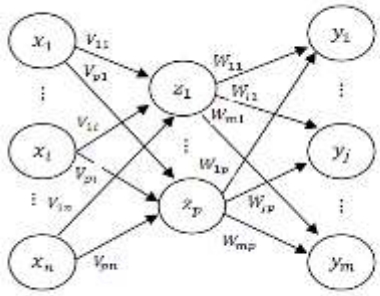
Jumlah neuron pada jaringan sama dengan jumlah variabel yang akan dicari solusinya. Hubungan antar neuron pada jaringan Hopfield modifikasi untuk menyelesaikan persamaan nonlinear bergantung pada hubungan antar variabel persamaan dengan koefisien sebagai bobot didalam jaringan [4].

Kondisi awal jaringan Hopfield modifikasi adalah jaringan yang tidak terdapat tegangan. Hal ini menyebabkan kondisi awal $(t = 0)$ dari u_j dan x_i bernilai nol. Jaringan Hopfield akan berfungsi apabila terdapat tegangan dalam jaringan tersebut. Kondisi pemberhentian dari proses iterasi metode Hopfield modifikasi apabila $|g_i(.)| < \varepsilon$ atau sudah mencapai maksimum iterasi.

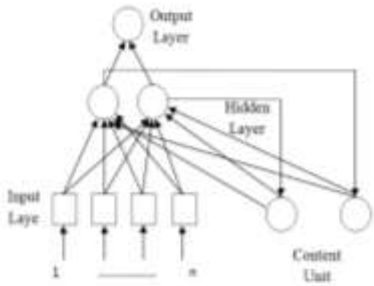
Langkah pertama untuk mencari solusi dari persamaan atau sistem persamaan dimulai dengan membentuk permasalahan kedalam bentuk fungsi energi. Langkah kedua fungsi energi persamaan diturunkan terhadap variabel-variabelnya. Hasil dari proses ini akan digunakan untuk mengambar arsitektur dan menentukan nilai bobot dan arus bias. Langkah ketiga menentukan nilai awal dari variabel (u_j) dan inputan (x_i) saat $t = 0$. Nilai-nilai awal digunakan untuk proses iterasi hingga iterasi berhenti.



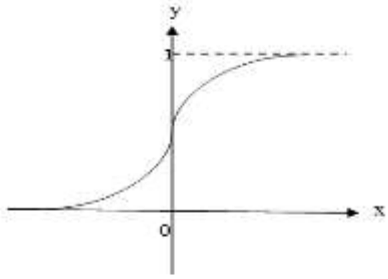
Gambar 2a Jaringan lapisan Tunggal



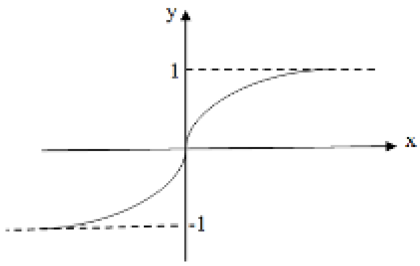
Gambar 2b Jaringan Lapisan jamak



Gambar 2c Jaringan *Recurent*



Gambar 3a Kurva Fungsi Sigmoid Unipolar



Gambar 3b Kurva Fungsi Sigmoid *Bipolar*

Contoh 1

Tentukan solusi dari persamaan nonlinear dua variabel $x_1^2x_2 + 2x_1x_2 - 3 = 0$ menggunakan metode Hopfield Modifikasi

$$x_1^2x_2 + 2x_1x_2 - 3 = 0$$

Langkah 1. Membentuk model persamaan nonlinear ke dalam bentuk fungsi energi persamaan

$$g(.) = x_1^2x_2 + 2x_1x_2 - 3$$

$$E_p = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(g_i(.)\right)^2$$

$$E_p = -\frac{1}{2}(x_1^2x_2 + 2x_1x_2 - 3)^2$$

Langkah 2. Menurunkan persamaan fungsi Energi persamaan, Menggambar arsitektur jaringan Hopfield Modifikasi dan menentukan nilai bobot dan arus bias.

$$\frac{du_j}{dt} = \frac{\partial E_p}{\partial x_j}$$

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{\partial E_p}{\partial x_1} = 6x_2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_2^2 - 6x_1^2x_2^2 - 2x_1^3x_2^2$$

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{\partial E_p}{\partial x_2} = 6x_1 + 3x_1^2 - 4x_1^2x_2 - 4x_1^3x_2 - x_1^4x_2$$

$$\frac{du_1}{dt} = W_{11}x_2 + W_{12}x_1x_2 + W_{13}x_1x_2^2 + W_{14}x_1^2x_2^2 + W_{15}x_1^3x_2^2 + I_{bias1}$$

$$\frac{du_2}{dt} = W_{21}x_1 + W_{22}x_1^2 + W_{23}x_1^2x_2 + W_{24}x_1^3x_2 + W_{25}x_1^4x_2 + I_{bias2}$$

jadi dari Gambar 5 dapat diketahui bahwa $W_{11} = 6$, $W_{12} = 6$, $W1_3 = -4$,$W_{14} = -6$, $W_5 = -2$ dan $I_{bias\,1} = 0$, $W_{21} = 6, W_{22} = 3, W_{23} = -4, W_{24} = -4, W_{25} = -1$, dan $I_{bias2} = 0$ yang digunakan sebagai bobot. Fungsi energi Hopfield Modifikasi dalam jaringan $E_H = x_1(6x_2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_2^2 - 6x_1^2x_2^2 - 2x_1^3x_2^2) + x_2(6x_1 + 3x_1^2 - 4x_1^2x_2 - 4x_1^3x_2 - x_1^4x_2)$.

Langkah 3. Melakukan proses iterasi untuk memperbarui nilai u_i dengan Metode *Euler* dan nilai x_i dengan fungsi sigmoid unipolar. Nilai-nilai awal pada $t = 0$ dengan $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, u_1(0) = 0$, dan $u_2(0) = 0$.

$u_1(t+1) = u_1(t) + \Delta t(6x_2(t) + 6x_1(t)x_2(t) - 4x_1(t)x_2^2(t) - 6x_1^2(t)x_2^2(t) - 2x_1^3(t)x_2^2(t))$

$u_2(t+1) = u_2(t) + \Delta t(6x_1(t) + 3x_1^2(t) - 4x_1^2(t)x_2(t) - 4x_1^3(t)x_2(t) - x_1^4(t)x_2(t))$

Hal ini dilakukan secara terus menerus sehingga syarat terpenuhi ($|g(.)| < 10^{-6}$) atau batas maksimum iterasi sudah tercapai. Pada masalah ini syarat tidak terpenuhi hingga batas maksimum iterasi. Hal ini dapat dilihat pada Tabel 1. Pada iterasi ke 500 didapatkan nilai $|g(.)| < 0{,}5$ maka nilai x_1 dan x_2 di iterasi ke 500 adalah solusi dari persamaan. Jadi nilai solusi dari persamaan $x_1^2x_2 + 2x_1x_2 = 3$ dengan menggunakan Metode Hopfield Modifikasi adalah $x_1 = 0{,}99988$ dan $x_2 = 1$.

Langkah dalam menyelidiki error atau penyimpangan nilai solusi baik itu akibat dari penggunaan Metode Hopfield modifikasi atau pembulatan dengan cara mensubtitusikan nilai solusi ke persamaan. Solusi yang didapatkan adalah $x_1 = 0{,}99988$ dan $x_2 = 1$ akan di subsitusikan ke persamaan

$$x_1^2x_2 + 2x_1x_2 = 0{,}99988^2.1 + 2.0{,}99988.1 = 0{,}99976 + 1{,}99976 = 2{,}99952$$

dapat dilihat bahwa solusi yang dihasilkan memiliki error atau penyimpangan 0,00048 dari nilai persamaan yang diinginkan.

Tabel 1 Nilai iterasi u_1, u_2, x_1, x_2, dan $g(.)$ contoh 1

t	iterasi	u_1	u_2	x_1	x_2	$g(.)$
0	1	0	0	0.5	0.5	-2.375
1	2	3.5625	3.03125	0.97241	0.95397	-0.24264
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
498	499	8.99447	998.585	0.99988	1	-0.0005
499	500	8.99645	1000.59	0.99988	1	-0.0005

Contoh 2

Tentukan solusi Sistem Persamaan nonlinear dibawah ini dengan menggunakan metode Hopfield Modifikasi

$$2x_1 + 3x_2^2 = 4$$
$$3x_1^2 + 5x_1x_2 = 6$$

Penyelesaian

Sistem persamaan diatas dapat di ubah menjadi

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_2^2 - 1 = 0$$
$$\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{5}{6}x_1x_2 - 1 = 0$$

Langkah 1. Membentuk model sistem persamaan nonlinear ke dalam bentuk fungsi energi persamaan.

$$g_1(.) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_2^2 - 1$$

$$g_2(.) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{5}{6}x_1x_2 - 1$$

$$E_p = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\big(g_i(.)\big)^2 = g_1(.)^2 + g_2(.)^2$$

$$E_p = -\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_2^2 - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{5}{6}x_1x_2 - 1\right)^2\right)$$

Langkah 2. Menurunkan persamaan fungsi Energi Hopfield Modifikasi, Menggambar arsitektur jaringan Hopfield Modifikasi dan menentukan nilai bobot dan arus bias.

$$\frac{du_j}{dt} = \frac{\partial E_p}{\partial x_j}$$

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{\partial E_p}{\partial x_1} = \frac{3}{4}x_1 + \frac{5}{6}x_2 - \frac{3}{8}x_2^2 - \frac{25}{36}x_1x_2^2 - \frac{15}{12}x_1^2x_2 - \frac{1}{2}x_1^3 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{\partial E_p}{\partial x_2} = \frac{5}{6}x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{3}{4}x_1x_2 - \frac{25}{36}x_1^2x_2 - \frac{5}{12}x_1^3 - \frac{9}{8}x_2^3$$

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{\partial E_p}{\partial x_1} = W_{11}x_1 + W_{12}x_2 + W_{13}x_2^2 + W_{14}x_1x_2^2 + W_{15}x_1^2x_2 + W_{16}x_1^3 + I_{bias\,1}$$

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{\partial E_p}{\partial x_2} = W_{21}x_1 + W_{22}x_2 + W_{23}x_1x_2 + W_{24}x_1^2x_2 + W_{25}x_1^3 + W_{26}x_2^3 + I_{bias\,2}$$

Jadi dari Gambar 6 dapat diketahui bahwa $W_{11} = \frac{3}{4}$, $W_{12} = \frac{5}{6}, W_{13} = -\frac{3}{8}, W_{14} = -\frac{25}{36}, W_{15} = -\frac{15}{12}, W_{16} = -\frac{1}{2}, I_{bias\,1} = \frac{1}{2}, W_{21} = \frac{5}{6}, W_{22} = \frac{3}{2}, W_{23} = -\frac{3}{4}, W_{24} = -\frac{25}{36}, W_{25} = -\frac{5}{12}, W_{26} = -\frac{9}{8}$, dan $I_{bias\,2} = 0$ yang akan digunakan sebagai bobot. Fungsi energi Hopfield Modifikasi dalam jaringan $E_H = x_1\left(\frac{3}{4}x_1 + \frac{5}{6}x_2 - \frac{3}{8}x_2^2 - \frac{25}{36}x_1x_2^2 - \frac{15}{12}x_1^2x_2 - \frac{1}{2}x_1^3 + \frac{1}{2}\right) + x_2\left(\frac{5}{6}x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{3}{4}x_1x_2 - \frac{25}{36}x_1^2x_2 - \frac{5}{12}x_1^3 - \frac{9}{8}x_2^3\right)$.

Langkah 3. Melakukan proses iterasi pembaharuan u_i dengan Metode *Euler* dan pembaharuan x_i dengan menggunakan fungsi sigmoid unipolar. Nilai-nilai awal $x_1(0), x_2(0), u_1(0)$, dan $u_2(0)$ dimana $x_1(0) = x_2(0) = u_1(0) = u_2(1) = 0$.

$$u_1(t+1) = u_1(t) + \Delta t\left(\frac{3}{4}x_1(t) + \frac{5}{6}x_2(t) - \frac{3}{8}x_2^2(t) - \frac{25}{36}x_1(t)x_2^2(t) - \frac{15}{12}x_1^2(t)x_2(t) - \frac{1}{2}x_1^3(t) + \frac{1}{2}\right)$$

$$u_2(t+1) = u_2(t) + \Delta t\left(\frac{5}{6}x_1(t) + \frac{3}{2}x_2(t) - \frac{3}{4}x_1(t)x_2(t) - \frac{25}{36}x_1^2(t)x_2(t) - \frac{5}{12}x_1^3(t) - \frac{9}{8}x_2^3(t)\right)$$

Iterasi akan diulang secara terus menerus hingga syarat $|g_1(.)| < \varepsilon$ dan $|g_2(.)| < \varepsilon$ terpenuhi. Iterasi selanjutnya pada permasalahan ini dapat dilihat pada Tabel 2. Pada iterasi ke 136 di dapatkan nilai $|g_1(.)| = 9{,}8.10^{-7} < 10^{-6}$ dan $|g_2(.)| = 7{,}03.10^{-7} < 10^{-6}$. Jadi proses iterasi permasalahan akan berhenti pada iterasi 136 karena syarat telah terpenuhi atau $|g_1(.)| < \varepsilon$ dan $|g_2(.)| < \varepsilon$ maka didapatkan solusi permasalahan ini yaitu $x_1 = 0{,}86413$ dan $x_2 = 0{,}8702$.

Tabel 2 Nilai iterasi $u_1, u_2, x_1, x_2, g_1(.)$ dan $g_2(.)$ contoh 2

t	iterasi	u_1	u_2	x_1	x_2	$g_1(.)$	$g_2(.)$
0	1	0.5	0	0.62246	0.5	-0.50127	-0.54691
1	2	1.31895	0.65965	0.78901	0.65918	-0.27961	-0.25532
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
134	135	1.85005	1.90271	0.86413	0.8702	-1.1E-06	7.62E-07
135	136	1.85005	1.90271	0.86413	0.8702	-9.8E-07	7.03E-07

Langkah dalam menyelidiki error atau penyimpangan nilai solusi baik itu akibat dari penggunaan Metode Hopfield modifikasi atau pembulatan dengan cara mensubsitusikan nilai solusi ke persamaan. Solusi yang didapatkan adalah $x_1 = 0{,}86413$ dan $x_2 = 0{,}8702$ akan di subtitusikan ke persamaan contoh dua

$$2x_1 + 3x_2^2 = 2.0{,}86413 + 3.(0{,}8702)^2 = 1{,}72826 + 2{,}27174 = 4$$
$$3x_1^2 + 5x_1x_2 = 3.(0{,}86413)^2 + 5.0{,}86413.0{,}8702 = 2{,}24016 + 3{,}75983 = 5{,}99999$$

dapat dilihat solusi yang dihasilkan memiliki error atau penyimpangan dari nilai persamaan pertama 0 dan pada persamaan kedua 0,00001.

Contoh 3

Tentukan solusi Persamaan nonlinear dibawah ini dengan menggunakan metode Hopfield Modifikasi

$$2x^2 + y + 3xy = 9$$

Penyelesaian

Pada persamaan nilai $f(1{,}1) \leq P_i$ maka perlu mengubah bentuk persamaan dimana nilai $f(1{,}1) \geq P_i$. Misalkan $x = 2v$ dan $y = w$ maka persamaan nonlinear menjadi $8v^2 + w + 6vw = 9$. Persamaan nonlinear dapat diubah menjadi

$$\frac{8}{9}v^2 + \frac{1}{9}w + \frac{6}{9}vw - 1 = 0$$

Langkah 1. Membentuk model sistem persamaan nonlinear ke dalam bentuk fungsi energi persamaan.

$$g(.) = \frac{8}{9}v^2 + \frac{1}{9}w + \frac{6}{9}vw - 1$$
$$E_p = -\frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}v^2 + \frac{1}{9}w + \frac{6}{9}vw - 1\right)^2$$

Langkah 2. Menurunkan persamaan fungsi Energi persamaan untuk mendapatkan pembaharuan nilai $u(t), v(t)$ dan $w(t)$.

$$\frac{du_v}{dt} = \frac{\partial E_p}{\partial v} = -\left(\frac{8}{9}v^2 + \frac{1}{9}w + \frac{6}{9}vw - 1\right)\left(\frac{16}{9}v + \frac{6}{9}w\right)$$
$$\frac{du_w}{dt} = \frac{\partial E_p}{\partial w} = -\left(\frac{8}{9}v^2 + \frac{1}{9}w + \frac{6}{9}vw - 1\right)\left(\frac{1}{9} + \frac{6}{9}v\right)$$

Langkah 3. Melakukan proses iterasi pembaharuan u_i dengan Metode *Euler* dan pembaharuan v dan w dengan menggunakan fungsi sigmoid unipolar. Nilai-nilai awal $v(0), w(0), u_v(0)$, dan $u_w(0)$ dimana $v(0) = w(0) = u_v(0) = u_w(1) = 0$.

$$v(t+1) = v(t) - \left(\frac{8}{9}v^2(t) + \frac{1}{9}w(t) + \frac{6}{9}v(t)w(t) - 1\right)\left(\frac{16}{9}v(t) + \frac{6}{9}w(t)\right)$$
$$w(t+1) = w(t) - \left(\frac{8}{9}v^2(t) + \frac{1}{9}w(t) + \frac{6}{9}v(t)w(t) - 1\right)\left(\frac{1}{9} + \frac{6}{9}v(t)\right)$$

Iterasi akan diulang secara terus menerus hingga syarat $|g(.)| < \varepsilon$ terpenuhi. Proses Iterasi pada permasalahan ini dapat dilihat pada Tabel 3. Pada iterasi ke 16 di dapatkan nilai $|g(.)| = 6.10^{-7} < 10^{-6}$. Jadi proses iterasi permasalahan akan berhenti pada iterasi 16 karena syarat telah terpenuhi atau $|g(.)| < \varepsilon$ maka didapatkan nilai v dan w yaitu $v = 0{,}8067$ dan $w = 0{,}64962$. Subtitusikan nilai v dan w pada permisalan awal untuk menemukan nilai x dan y.

$$x = 2v = 2.0{,}8067 = 1{,}6134 \qquad y = w = 0{,}64962$$

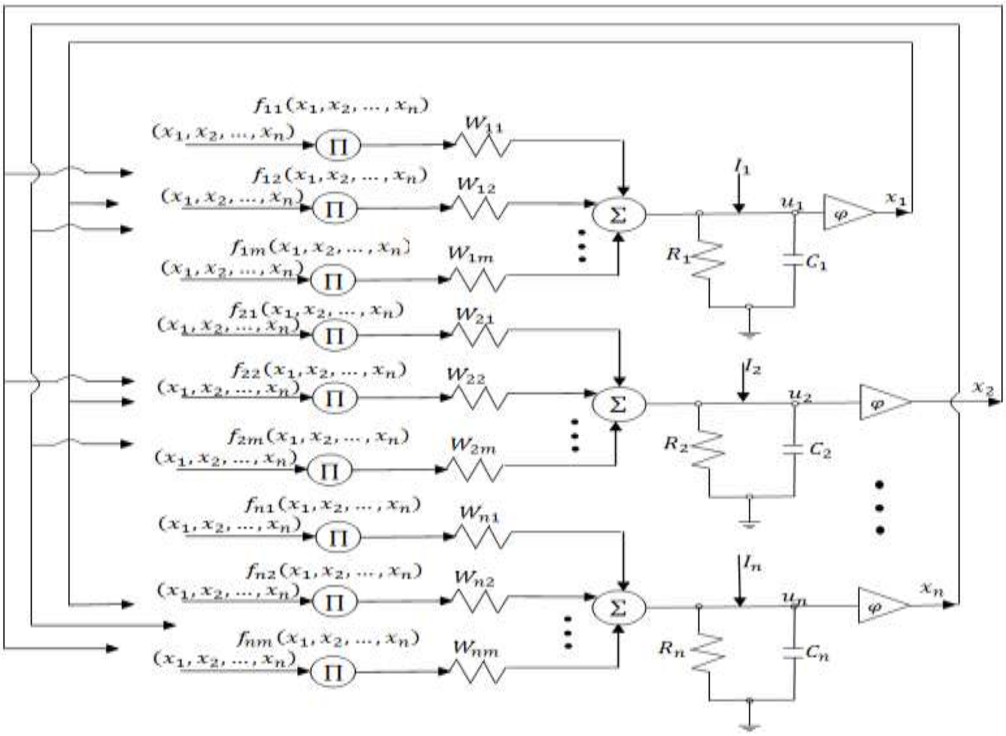
Langkah dalam menyelidiki error atau penyimpangan nilai solusi baik itu akibat dari penggunaan Metode Hopfield modifikasi atau pembulatan dengan cara mensubsitusikan nilai solusi ke persamaan. Solusi yang didapatkan adalah $x = 1{,}6134$ dan $y = 0{,}64962$ akan di subtitusikan ke persamaan contoh tiga

$$2x^2 + y + 3xy = 2.(1{,}6134)^2 + 0{,}64962 + 3.(1{,}6134).(0{,}64962) = 9{,}00003$$

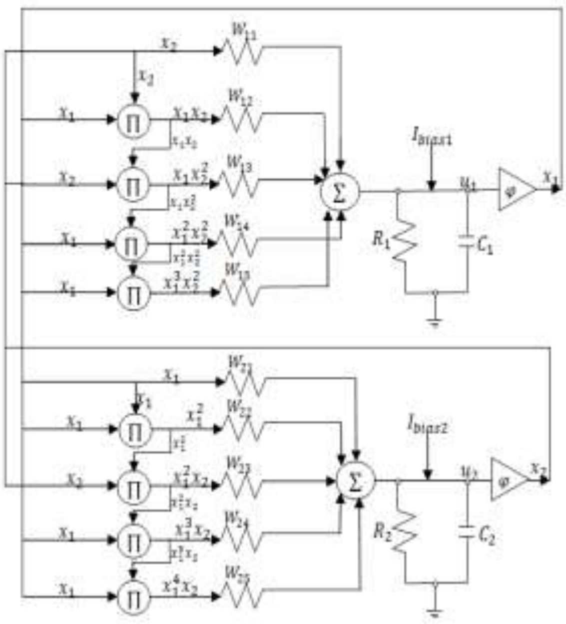
dapat dilihat solusi yang dihasilkan apabila di subtitusikan ke persamaan memiliki error 0,00003.

Tabel 3 Nilai iterasi u_v, u_w, v, w, dan $g(.)$

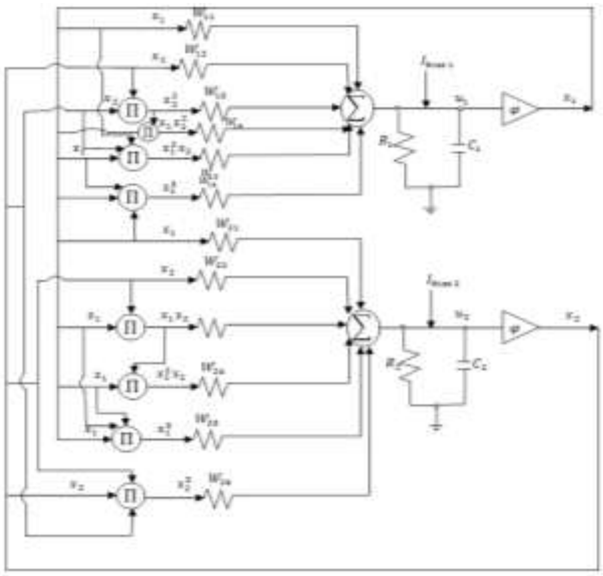
t	i	u_v	u_w	v	w	$g(.)$
0	1	0	0,111111	0,5	0,52775	-4,889
1	2	0,673988	0,352543	0,662396	0,58723	-2,56873
2	3	1,121827	0,510295	0,754328	0,62488	-0,99488
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
15	16	1,428707	0,617349	0,8067	0,64962	-1,7E-06
16	17	1,428707	0,617349	0,8067	0,64962	-6E-07



Gambar 4 Arsitektur Jaringan Hopfield Modifikasi Nonlinear



Gambar 5 Arsitektur jaringan Hopfield Modifikasi $x_1^2x_2 + 2x_1x_2 - 3 = 0$



Gambar 6 Arsitektur Jaringan Hopfield sistem persamaan $2x_1 + 3x_2^2 - 4 = 0$ dan $3x_1^2 + 5x_1x_2 = 6$

PENUTUP

Metode Hopfield modifikasi dapat digunakan untuk mencari solusi dari persamaan dan sistem persamaan nonlinear. Metode Hopfield modifikasi merupakan salah satu metode numerik yang berasal dari pengembangan jaringan saraf Hopfield. Hal ini dapat dilihat dari solusi yang didapatkan pada contoh –contoh yang ada. Solusi persamaan didapatkan dengan melakukan proses iterasi. Metode Hopfield modifikasi dapat diketahui penyebaran nilai variabelnya yang dapat dilihat dari asitektur jaringan Hopfield modifikasi. Arsitektur jaringan Hopfield modifikasi dapat dilihat dari arsitektur contoh-contoh yang ada. Pada jaringan arsitektur dapat diketahui energi Hopfield pada jaringan arsitektur Hopfield modifikasi.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Hopfield, J.J. Neural Network and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities. *in Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA vol. 79 no. 8*. 1982; 2554-2558.

[2]. Utami, N.N.R. Perbandingan Penyelesaian Sistem Persamaan Nonlinear Menggunakan Metode Newton-Rapshon dan Metode Jacobian, *E-Jurnal Matematika Vol 2 no 2*. 2013; 1751-2303.

[3]. Chapra dan Canale. *Numerical Methods For Engineers, 2nd Edition*, I Nyoman Susila (Alih Bahasa). Jakarta: Erlangga; 1988.

[4]. Devi, F.M. *Penyelesaian Sistem Persamaan Nonlinear dengan Metode Jaringan Syaraf Tiruan Hopfield.* Jakarta: UIN Syarif Hidayatulah; 2011.

[5]. Nugroho, D.B. *Metode Numerik*. Salatiga: FMIPA Universitas Kristen Satya Wacana; 2009.

[6]. Julsam. Pendeteksian Derau Citra Secara Otomatis Menggunakan Teknik Jaringan Syaraf Tiruan, *E-jurnal Vol.1 no 2*. 2009; 2085-6989.

[7]. Mishra, Deepak and Kalra, Prem K. Modified Hopfield Neural Network Approach for Solving Nonlinear Algebraic Equations, *Engineering Letters*. 2007; (14)1:23.

IKON PRATIKNO	:	Jurusan Matematika, FMIPA UNTAN, Pontianak, Ikonp1411@gmail.com
NILAMSARI KUSUMASTUTI	:	Jurusan Matematika, FMIPA UNTAN, Pontianak, uminilam@yahoo.com
BAYU PRIHANDONO	:	Jurusan Matematika, FMIPA UNTAN, Pontianak, beiprihandono@gmail.com